**Wiskunde 4NS** 29-08-00

**Tentamenopgave**

I

Geef aan, bij ieder van de volgende reeksen, voor welke waarde van de getallen $\alpha \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{C}$, de reeks convergent is (resp. absoluut convergent), en geef een reden voor je conclusie (citeer eventueel het relevante kenmerk).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^\alpha}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin(\frac{1}{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}.$$

II

1. Toon aan dat voor $t > 0$

(1) $$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2+t^2} = \frac{\pi}{2t}$$

2. Toon aan dat deze functie van $t > 0$ differentieerbaar is en dat differentiatie onder het integraalteken geoorloofd is. Aanwijzing: beperk $t$ eerst tot $(a,b)$ met $0 < a < b < +\infty$.

3. Bereken m.b.v. (1) de integralen

(2) $$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+t^2)^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+t^2)^3}$$

en rechtvaardig je berekening m.b.v. de theorie.

4. Wat kan je zeggen van de integraal

(3) $$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+t^2)^n}$$

met $n \in \mathbb{N}$?

III

Voor $f \in L^1(\mathbb{R})$ zij $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} f(x) dx$.

1. Geef voor ieder van de volgende functies $f$ de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$: $(a > 0)$

i. $f = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}$, ii. $f(x) = e^{-ax^2}$, iii. $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$. Aanwijzing: Ga eventueel uit van het bekende resultaat dat $e^{-\pi x^2}$ invariant is onder Fouriertransformatie.

2. Zij $P_a(y) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{a}{a^2+y^2}$. Toon aan, m.b.v. vraag 1 iii, dat $P_a * P_b = P_{a+b}$, $a > 0$, $b > 0$.

3. Geef de formule van Plancherel en voorwaarden waaronder deze geldig is.

4. Bereken, voor , $a > 0$, $b > 0$, de integraal $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2+y^2} \frac{b}{b^2+y^2} dy$.

IV

Zij $F(x,y,z) = (x^2, x+z, yz)$, $S = \{(x,y,z) : z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 < 4\}$ een stuk paraboloïde met rand de cirkel $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4, z = 0\}$ in het $xy$-vlak antiklok georiënteerd.

1. Formuleer de formule van Stokes voor dit geval.

2. Bereken de lijnintegraal $\int_\Gamma F.T ds$, waar $T$ de georiënteerde eenheids raakvector aan $\Gamma$ is. (Aanwijzing: $2\cos^2 t = 1 + \cos(2t)$).

3. Zij nu $S = \{(x,y,z) : z = 100(4-x^2-y^2), x^2+y^2 < 4\}$. Wat kan je, zonder te rekenen, zeggen van de volgende oppervlakte-integraal, waarin $n$ de naar boven gerichte normaal is: $\iint_S \text{rot} F.n\, dS$ ?